

## ПИТАЊА ЗА ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА

1. Одреди вредност израза  $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$  за  $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$  и  $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ .
2. Израчунај  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ .
3. Среди израз  $\left(\frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8}\right) : \frac{1}{(a-1)^2+3}$ .
4. Среди израз  $\left(\frac{3}{a-1} - \frac{3a^2+3a+3}{a^2-1} : \frac{a^4-a}{a^3+1}\right) \cdot \frac{a-a^2}{3}$ .
5. Израчунај  $\frac{x+x^{-1}-1}{x+x^{-2}} - \frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}+2} : \frac{x^{-1}}{1+x^{-1}}$ .
6. Реши једначину  $\frac{1}{x^2-x} = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x}$ .
7. Одреди сва реална решења  $|2x-7| + x = 5$ .
8. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 54. Ако је највећи од њих два пута већи од најмањег, одреди те чланове.
9. Одреди  $(\log_2 7 + \log_7 2)^{-1}$  ако је  $\log_3 7 = a$  и  $\log_3 2 = b$ .
10. Одреди  $m \in R$  да једначина  $2 \log x = \log(x+m) + 2 \log 2$  има два различита реална решења.
11. Реши једначину  $\log_5 [\log_2 (\log_7 x)] = 0$ .
12. Реши једначину  $2^{x^2-2x-10} = \frac{1}{4}$ .
13. Реши једначину  $10^{2 \log 3} = 8x + 5$ .
14. Реши једначину  $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ .
15. За које  $m \in R$  је неједнакост  $-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$  задовољена за свако  $x$ .
16. Реши неједначину  $\frac{x-5}{4-x} \leq 2$ .
17. Решити и дискутовати систем у зависности од параметра  $a$   
 $(a+1)x - y = 1 \wedge ax + 4y = 10$ .
18. Одреди  $m \in R$  у једначини  $x^2 - 2x + m = 0$  тако да једно решење буде  $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ .
19. Одреди  $k \in R$  да решења једначине  $(k-1)x^2 + (k-5)x - (k+2) = 0$  задовољавају услов  
 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$ .
20. Одреди  $m \in R$  за које је збир квадрата решења једначине  $x^2 - mx + m - 3 = 0$  најмањи.
21. Одреди  $a \in R$  у једначини  $x^2 - x + a - 2 = 0$  ако њена решења задовољавају услов  
 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4 = 0$ .

22. Одреди реална решења  $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$ .
23. Одреди решења једначине  $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$  ако  $x \in (0, 2\pi)$ .
24. Докажи  $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$ .
25. Израчунај  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
26. Одреди решења  $\sin x \cos \frac{\pi}{7} + \cos x \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  у интервалу  $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
27. У фигуру ограничену луком криве  $2x^2 - y = 6$  и осом  $Ox$  уписан је правоугаоник тако да су му два темена на оси  $Ox$ . Одреди максималну површину тог правоугаоника.
28. Ако је  $f(x) = \log_6 x + 3 \log_3 9x$ , израчунај  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ .
29. Ако је  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$ , израчунај  $f(3)$ .
30. Одреди које су функције једнаке  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = \frac{x^2}{x}$ ,  $f_3(x) = \sqrt{x^2}$ ,  $f_4(x) = (\sqrt{x})^2$ .
31. Одреди запремину лопте ако је њена површина  $324\pi$ .
32. Одреди  $a \in \mathbb{R}$  тако да права  $ax + y = 5$  додирује елипсу  $9x^2 + 16y^2 = 144$ .
33. Одреди коефицијент правца праве која садржи тачке  $A(1, 2)$  и  $B(-3, 1)$ .
34. У купу полупречника  $r = 5$  и висине  $H = 15$  уписана је лопта. Одреди полупречник лопте.
35. Тетива круга је за 2 мања од пречника, а одстојање центра круга од тетиве за 2 мање од полупречника. Одреди дужину тетиве.
36. Одреди коефицијент правца праве нормалне на праву повучени кроз тачке  $A(-2, -1)$  и  $B(2, 2)$ .
37.  $\int \ln x dx$ .
38.  $\int \frac{\sin x}{3 - \cos x} dx$ .
39.  $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}$ .
40.  $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ .
41.  $\int e^x \sin x dx$ .
42.  $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$ .
43.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ .
44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \sin x}{3x + \sin x}$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ .

46. Одреди монотоност и екстремне вредности функције  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

47. Одреди вредност комплексног израза  $\frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}$  за  $z = 1 + i$ .

48. Реши по  $z$  једначину  $z + \bar{z} = 6 - i$ .

49. Дато је  $z_1 = 2 - 3i$ . Одреди  $z_2 = x + iy$  који задовољава услове

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 18 \wedge \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}_2}{z_1}\right) = \frac{1}{13}.$$

50. Реши по  $z$  ( $z = x + iy$ ) једначину  $|z| - z = 1 + 2i$ .

51. Израчунај  $\sqrt[3]{a^2 b \sqrt{a \sqrt{a^3 b^5}}} : a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}$ ;  $a, b > 0$ .

52. Реши једначину  $\sqrt{2x^2 + 7} = x^2 - 4$ .

53. Одреди једначину праве која садржи тачку  $A(1,3)$  и нормална је на праву одређену тачкама  $C(0,1)$  и  $D(2,5)$ .

54. Одреди једначину праве која садржи тачку  $A(1,3)$  и паралелна је са правом одређеном тачкама  $C(0,-1)$  и  $D(2,5)$ .

55. Рационалисати  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ .

56. Рационалисати  $\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}}$ .

57. Рационалисати  $\frac{12}{\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{5}}$ .

58. Одреди  $m \in \mathbb{R}$  тако да решења једначине  $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$  буду негативна.

59. За коју вредност  $b \in \mathbb{R}$  је збир кубова решења једначине

$$6x^2 + 6(1-b)x - 6b + 2b^2 = 0$$
 најмањи.

60. Реши једначину  $5^x - 5^{3-x} = 20$ .

61. Реши једначину  $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$ .

62. Реши једначину  $(2 \log_x \sqrt{5})^2 - 3 \log_x \sqrt{5} + 1 = 0$ .

63. Написати једначину праве која садржи тачке  $A(2,5)$  и  $B(-5,4)$ .

64. Реши једначину  $\log_2^2 x + 2 \log_2 \sqrt{x-2} = 0$ .

65. Реши једначину  $9^{1+\log_3 x} - 3^{1+\log_3 x} = 210$ .

66. Израчунај  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$  ако је  $\cos \alpha = \frac{3}{5} \wedge \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ .

67. Израчунај  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$  ако је  $\sin \alpha = \frac{3}{5} \wedge \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

68. Реши једначину  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ .

69. Реши једначину  $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$ .
70. Реши троугао ако је  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ .
71. Одреди координате тежишта троугла ABC ако је A(1,5), B(2, -4) и C(3,2).
72. Написати једначину симетрале дужи AB ако је A(5,4) и B(-3,2).
73. Израчунај растојање тачке A(1,2) од праве  $3x-4y=2$ .
74. Наћи изводе функција  $y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$  и  $y = \sin^3 x \cdot (5x^2 - 2x + 1)$ .
75. Решења квадратне једначине  $x_1$  и  $x_2$  задовољавају услове  $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 0$  и  $mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m - 1$ . Написати ову квадратну једначину и одреди за које  $m$  једначина има реална решења.
76. Дата је једначина  $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + (m+3) = 0$ . Одреди параметар тако да збир квадрата њених решења буде једнак 52.
77. Дискутовати решења квадратне једначине  $(k-2)x^2 + (k+1)x + (k+1) = 0$  у зависности од параметра  $k$ .
78. Нацртати график функције  $y = |x - x^2| - x$ .
79. Упореди логаритме  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{5}$  и  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{5}{6}$ .
80. Израчунај 
$$\frac{\sin \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \left( -\frac{5\pi}{4} \right) \cdot \cos 1000^\circ}{\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} \cdot \cos(-2\pi) \cdot \sin 170^\circ}$$
.
81. Сведи на оштре углове  $\sin \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)$ .
82. Одреди област дефинисаности функција  $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ,  $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ ,  $y = \frac{1}{x^2 - x + 2}$ .
83. Ако је  $f(x) = 3^{2x+1}$  и  $g(x) = \log(2x-3)$  одеди  $f(g(x))$  и  $f^{-1}(x)$ .
84. Ако је  $f(x) = \sqrt{x+1}$  и  $g(x) = 4x-1$ , одреди збир  $f \left( g \left( \frac{5}{4} \right) \right) + g \left( f \left( \frac{5}{4} \right) \right)$ .